

# Cohomología y Extensiones de Grupoides Dobles

JESÚS ALONSO OCHOA ARANGO, ALEJANDRO TIRABOSCHI

Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia

Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina

Email: [jesus.ocha@javeriana.edu.co](mailto:jesus.ocha@javeriana.edu.co), [tirabo@famaf.unc.edu](mailto:tirabo@famaf.unc.edu)

**RESUMEN.** Un grupoide doble es un conjunto  $\mathcal{B}$  dotado con dos estructuras de grupoides diferentes, pero compatibles. Es útil representar elementos de  $\mathcal{B}$  como cajas que *pegan* bien, horizontal y verticalmente, de acuerdo a la estructura de grupoide bajo consideración. Los lados verticales (respectivamente horizontales) de una caja pertenecen a otro grupoide  $\mathcal{V}$  (resp.  $\mathcal{H}$ ). Un grupoide doble es *delgado* si cualquier caja está determinada por sus cuatro lados. La noción de grupoide doble fue intrducida por Ehresmann [E] y posteriormente estudiada en [B04, BJ, BM92, BS76] y referencias incluidas allí.

La noción de grupoide doble de Lie fué definida e investigada por K. Mackenzie [M00, M92]; ver también [P, LW89, M99] para aplicaciones a geometría diferencial y de Poisson. En particular, en [M92] se planteó el problema de la clasificación de los grupoides dobles de Lie, ver también [BM92]. En este último, se dió una solución completa en el caso de los grupoides dobles de Lie *localmente triviales*.

Recientemente en [AN09] se dio, en dos pasos, una descripción completa de los grupoides dobles discretos:

- (a) Cualquier grupoide doble es una extensión de un grupoide doble delgado (su *marco*) por un fibrado de grupos abelianos.
- (b) La categoría de los grupoides dobles delgados, que satisfacen la *condición de llenado*, con grupoides vertical y horizontal fijos  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$ , es equivalente a la categoría de diagramas sobre  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$ .

En [AOT], extendimos el paso (b) al contexto de los grupoides dobles de Lie. En este contexto, la aplicación *lado superior-derecho* es una submersión sobreyectiva (una versión diferenciable de la condición de llenado [M92]). Nuestro principal resultado fue la siguiente *equivalencia de categorías*:

*La categoría de grupoides dobles de Lie delgados, con grupoides de Lie vertical y horizontal fijos  $\mathcal{V}$  and  $\mathcal{H}$ , y acción medular propia, es equivalente a la categoría de diagramas de grupoides de Lie  $(\mathcal{D}, j, i)$  tal que las aplicaciones  $j$  e  $i$  son transversales en las identidades.*

En esta presentación expondremos algunos resultados relacionados con el paso (a) de la caracterización dada en [AN09]. Construiremos una teoría de cohomología de grupoides dobles y mostraremos que las extensiones de los mismos están determinadas por el primer grupo de cohomología, de la cohomología total, del complejo doble construido. Estos resultados hacen parte de un trabajo conjunto con A. Tiraboschi.

**PALABRAS CLAVES.** Grupoide, grupoide doble, diagrama de grupoides, conjunto bisimplicial, complejo doble.

## REFERENCIAS

- [AN09] N. ANDRUSKIEWITSCH and S. NATALE *The structure of double groupoids*, J. of Pure and Applied Algebra **213**, 1031–1045 (2009).
- [AOT] N. ANDRUSKIEWITSCH, J. A. OCHOA ARANGO, A. TIRABOSCHI *On Slim doble Lie groupoids*, to appear in *Pacific Journal of Math.* arXiv:0808.3147v1 [math.DG].
- [B04] R. BROWN, *Crossed complexes and homotopy groupoids as non commutative tools for higher dimensional local-to-global problems*, Fields Inst. Commun. **43**, 101–130, Amer. Math. Soc. (2004).
- [BJ] R. BROWN and G. JANELIDZE, *Galois theory and a new homotopy double groupoid of a map of spaces*, Appl. Categ. Structures **12**, 63–80 (2004).
- [BM92] R. BROWN and K. MACKENZIE, *Determination of a double Lie groupoid by its core diagram*, J. Pure Appl. Algebra **80**, 237–272 (1992).
- [BS76] R. BROWN and C. SPENCER, *Double groupoids and crossed modules*, Cahiers Topo. et Géo. Diff. **XVII**, 343–364 (1976).
- [E] C. EHRESMANN, *Catégories doubles et catégories structurées*, C. R. Acad. Sci. Paris **256**, 1198–1201 (1963). *Catégories structurées* Ann. Sci. École Norm. Sup. **80**, 349–426 (1963).
- [LW89] J.-H. LU AND A. WEINSTEIN, *Groupoïdes symplectiques doubles des groupes de Lie-Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **309**, 951–954 (1989).
- [M92] K. MACKENZIE, *Double Lie algebroids and Second-order Geometry, I*, Adv. Math. **94**, 180–239 (1992).
- [M99] K. MACKENZIE, *On symplectic double groupoids and the duality of Poisson groupoids*, Internat. J. Math. **10**, 435–456 (1999).
- [M00] K. MACKENZIE, *Double Lie algebroides and Second-order Geometry, II*, Adv. Math. **154**, 46–57 (2000).
- [M05] K. MACKENZIE, *General Theory of Lie Groupoids and Algebroids*, London Mathematical Society Lecture Note 213, Cambridge University Press (2005).
- [P] J. PRADINES, *Fibrés vectoriels doubles et calcul des jets non holonomes*, Esquisses Math. **29**, Université d’Amiens, Amiens, (1977).